

ii) περίπτωση λ_1 πραγματικός, λ_2, λ_3 ρίζες του ax^2+bx+c με $\Delta < 0$ και $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(b - \sqrt{\Delta})(b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 > 0$$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και λ_1 ιδιοτιμή ορθογώνιου πίνακα $\lambda_1 = 1$ ή $\lambda_1 = -1$

Άρα $\boxed{\lambda_1 = 1}$

Άρα ο A έχει ιδιοτιμή το 1. $\dim V(1) \geq 1$

Έστω $\vec{a}_1$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

Έστω $\vec{y}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $(V(1))$

Το $\vec{y}_1$ καθορίζει τον άξονα (E) .

Επισημαίνω το $\vec{y}_1$ σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ (με το βίνηδες εσωτερικό γινόμενο) των $\gamma = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$

$$f_A: \mathbb{R}^{3 \times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

$$f_A(X) = AX$$

$$(f_A)_{\gamma}^{\gamma} = (I)_{\xi}^{\xi} (f_A)_{\xi}^{\xi} (I)_{\gamma}^{\gamma}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \delta \\ 0 & b & \varepsilon \\ 0 & \gamma & \zeta \end{pmatrix} = \begin{matrix} \vec{r}_1 \rightarrow \\ \vec{r}_2 \rightarrow \\ \vec{r}_3 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} P^t & & \\ & A & \\ & & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{pmatrix}$$

$f_A(\vec{r}_i) = 1\vec{r}_i$

ορθογώνιος

πίνακας αλλαγής βάσης από γ σε ε
 OKB OKB
 (ορθογώνιος)

f_A Ισομετρία

$$\det B = \det P^t \det A \det P = \det A = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \delta \\ 0 & b & \varepsilon \\ 0 & \gamma & \zeta \end{pmatrix} \text{ και } \det \begin{pmatrix} b & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} = 1 \text{ (αφού } 1 = \det B = \det \begin{pmatrix} b & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix})$$

ορθογώνιος
και $\det A = 1$

$$\text{Άρα } \begin{pmatrix} b & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ αφού } \begin{pmatrix} b & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} = \text{εστροφή}$$

$$\text{Άρα } b = \cos\theta, \varepsilon = -\eta\mu\theta, \gamma = \eta\mu\theta, \zeta = \cos\theta$$

$$\text{Άρα } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\eta\mu\theta \\ 0 & \eta\mu\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(3)

x, y, z οι
αυτεζωγμένες του $\vec{r}$
 $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

Επίσης $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega\mu & -\eta\mu\theta \\ 0 & \eta\mu\theta & \omega\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x \\ \omega\mu y - \eta\mu\theta z \\ \eta\mu\theta y + \omega\mu z \end{pmatrix} \rightarrow$ γραφή του διανύσματος
 y, z κατά γωνία θ

$\hookrightarrow$ οι αυτεζωγμένες της έκδοσης του διανύσματος $\vec{r}$

Τέλος θα βρούμε το $\omega\mu$

Έχουμε: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega\mu & -\eta\mu\theta \\ 0 & \eta\mu\theta & \omega\mu \end{pmatrix} = P^T A P \Rightarrow B$ και A όμοια

Τότε ισχύει $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2\omega\mu = a_{11} + a_{22} + a_{33} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega\mu = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2}$

SOS

new definition
 $\omega\mu$

SOS Παράδειγμα: Δείξτε ότι ο πίνακας $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

ταξιζόμενη γραφή γνήσιο (n) ως προς άξονα (ε) κάθετο σε αυτό. Βρείτε τον άξονα (ε), το γνήσιο (n) και το συν.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε θεωρήματα Euler.

i) Ο A είναι 3×3

ii) Πρέπει να εξετάσω αν ο A είναι ορθώγωνος, δηλ. αν

$$A^T A = I.$$

$$\text{Έτσι } A^T A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{Άρα ο A ορθώγωνος}$$

iii) Επίσης πρέπει $\det A = 1$ (Με πράξεις $\det A = 1$)

Άρα μπορώ να εφαρμόσω Euler.

Τότε, το 1 είναι ιδιοτιμή του A (από θ. Euler)

$$\text{Έτσι } V(1) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - 1I)X = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3}-1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}-1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3r_1 \\ 3r_2 \\ 3r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 5r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \Rightarrow x = t, t \in \mathbb{R} \\ y - \frac{1}{3}z &= 0 \Rightarrow y = t, t \in \mathbb{R} \\ z &= 3t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα $V(\perp) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Έστω $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Γνωρίζουμε $\vec{f}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}$

Άρα ο άξονας (ε) καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}$

Τώρα επιθυμούμε να βρούμε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ (Gram-Schmidt)

Γνωρίζουμε $\vec{a}_1 = \vec{f}_1 = \vec{b}_1$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έστω $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/11 \\ 1/11 \\ 3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/11 \\ 10/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$$

και $\vec{f}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/11 \\ 10/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{121} + \frac{100}{121} + \frac{9}{121}}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{110} \\ 10/\sqrt{110} \\ -3/\sqrt{110} \end{pmatrix}$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle \vec{a}_3, \vec{j}_1 \rangle \vec{j}_1 + \langle \vec{a}_3, \vec{j}_2 \rangle \vec{j}_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 4/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} + \left(-\frac{13}{\sqrt{10}}\right) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{110} \\ 10/\sqrt{110} \\ -3/\sqrt{110} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 0 \\ 4/10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \# \text{ (ε) καθορίζεται από τα } \vec{j}_i$$

$$\text{tr}_A = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega\theta & -\eta/\theta \\ 0 & \eta/\theta & \omega\theta \end{pmatrix} \quad \text{To (η) καθορίζεται από τα } \vec{j}_2, \vec{j}_3$$

$$-\frac{2}{3} = 2\omega\theta + 1 \rightarrow \omega\theta = -\frac{5}{6}$$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

A ορθογώνιος

$$\det A = -1$$

-1 ιδιοτιμή

$$\langle \vec{f}_1 \rangle = V(-1)$$

$$\vec{f}_2, \vec{f}_3$$

$$(f_A)^r_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3 \quad \varepsilon} \\ 0 & \boxed{\gamma \quad 1} \end{pmatrix}$$

← ορθογ.

$$(f_A)^r_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4 / Φυλλολόγιο #6

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ παριστάνει βζροφή κατά μινια ϕ περί ενός άξονα (ε) που διέρχεται από το $(0,0,0)$. Βρείτε τον άξονα (ε) και τον μινια ϕ .

Λύση: i) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$ii) A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

άρα A ορθογώνιος

$$iii) \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα παριστάνει βζροφή κατά μινια ϕ ως ...

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array}}$$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ο άξονας (ε) καθορίζεται από το ~~διάνυσμα~~ $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos \phi = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1$$

$$\boxed{\phi = \pi}$$

$$\cos \phi = -1$$

Άσκηση 1 / Φύλλαδο #7 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος πίνακας.

Δείξτε ότι $A + 3I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

Λύση: Έστω $A + 3I_n$ ότι είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det(A + 3I_n) \neq 0 \Rightarrow -3$ ιδιοτιμή του A . Άρα, αφού πραγματικές τιμές ορθογώνιου πίνακα είναι $+1$ ή -1

Άρα ο πίνακας $A + 3I_n$ αντιστρέφεται. (Συνέχεια στο επόμενο φύλλαδο)

(9)